級数展開の世界観

星　貴之

平成 22 年 11 月 11 日

1.　はじめに

テイラー展開やフーリエ級数展開は定義を暗記するだけではつまらない．本稿ではそれらが何のためにどういう操作をしているのかを解説する．なお工学で扱う大概の関数は素性がよいため, ここでは数学的厳密性よりも直観的な解釈を優先する．

2.　テイラー展開

関数 $f(x)$ が多項式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{1}$$

で表すことができると, 以下の意味でうれしい．

- 直接計算できない関数 (三角関数, ベッセル関数 [1] など) の値を求めることができる．関数電卓などはこれにもとづいて算出した値を返す．
- x が十分小さい ($x \ll 1$) とき $f(x) \simeq a_0 + a_1 x$ と近似できる (線形近似)．これにもとづいて単振動や波動方程式が導出されることが多い．

係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は, 定数の微分が 0 になることと, $x = 0$ のとき x のべき乗が全て 0 になることを利用して求める．$f(x)$ が無限回微分可能な実関数, または正則な複素関数であると仮定する．式 (1) を x で n 回微分すると, a_0 から a_{n-1} までは x の個数が足りず 0 になる．

$$f^{(n)}(x) = n!\, a_n + \frac{(n+1)!}{1!}\, a_{n+1}\, x + \frac{(n+2)!}{2!}\, a_{n+2}\, x^2 + \cdots \tag{2}$$

$n!$ などは微分するたびに出てくる x の右肩の数の積である．ここで $x = 0$ とすると定数項 $n!\, a_n$ のみが残り, 次式が得られる．

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{3}$$

これが原点まわりのテイラー展開 (マクローリン展開) の係数である．同様にして, 一般の $x = p$ まわりのテイラー展開も導くことができる．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-p)^n \tag{4}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \tag{5}$$

3.　ローラン展開

正則でない複素関数 $f(x)$ も一般の $x = p$ のまわりで

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x-p)^n = \cdots + \frac{a_{-1}}{x-p} + a_0 + a_1\,(x-p) + \cdots \tag{6}$$

のように級数展開することができる．これはテイラー展開を負のべき乗まで拡張したものと考えられ, 以下の意味でうれしい．

- テイラー展開不可能な関数の挙動を解析できる．
- 留数と関係があり, 複素積分の計算に役立つ．

係数 a_n $(n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$ は, -1 乗以外の $(x-p)$ のべき乗を p のまわりで周回積分すると 0 になることを利用して求める．$f(x)$ が一価関数であると仮定する．式 (6) に $(x-p)^{-(n+1)}$ をかけて周回積分すると a_n の項のみが残る．

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{f(x)}{(x-p)^{n+1}}\mathrm{d}x = \oint_{\mathrm{C}} \frac{a_n}{x-p}\mathrm{d}x \tag{7}$$

ここで C は p を含む閉曲線とする．右辺の値は $2\pi\mathrm{i}\, a_n$ なので, 次式が得られる．

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathrm{C}} \frac{f(x)}{(x-p)^{n+1}}\mathrm{d}x \tag{8}$$

これが $x = p$ まわりのローラン展開の係数である．しかし定義通り積分を実行して展開することは稀で,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{when} \quad |x| < 1 \tag{9}$$

(等比級数の無限和) などよく知られたテイラー展開を利用して式変形により直接展開することが多い．

4.　フーリエ級数展開

周期 $2\pi/k$ をもつ実関数 $f(x)$ は, その整数倍の周波数の正弦波により

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}nkx} = \cdots + a_{-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx} + a_0 + a_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx} + \cdots \tag{10}$$

と表すことができる．これは以下の意味でうれしい．

- ノイズ成分 (高周波や特定の周波数) を分離できる．
- 楽器などの倍音構造 (音色) を解析できる．
- 線形な微分方程式において, 代表的な解 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx}$ を仮定して解けば任意の周期波形について解いたことになる．

係数 a_n $(n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$ は, 異なる周波数の正弦波同士が直交していることを利用して求める. 式 (10) と $\mathrm{e}^{\mathrm{j}nkx}$ の内積をとる ($\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nkx}$ をかけて一周期で積分する) と a_n の項のみが残る.

$$\int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nkx}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} a_n \mathrm{d}x \tag{11}$$

右辺の値は $2\pi a_n/k$ なので, 次式が得られる.

$$a_n = \frac{k}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nkx}\mathrm{d}x \tag{12}$$

これがフーリエ級数展開の係数である. $k \to 0$ の極限をとるとフーリエ変換が得られ, 周期が無限に長い (つまり非周期的な) 関数を扱うことができる.

5. おわりに

本稿では展開できることを前提として解説した. それぞれの級数の収束性や, テイラー展開に関係する剰余項・収束半径, ローラン展開に関係する留数, などについては教科書, あるいは文献 [2, 3, 4, 5] を参照のこと.

参考文献

[1] 筒井喜平: Personal CAE Project, 円板の非定常熱伝導問題の理論解について, http://computation.cside.com/TA2D/thermal_fem_test_10-2.html.

[2] 永野哲也: 基礎数学 II, 第 10 回, テイラーの定理から関数の多項式近似を考える, http://sun.ac.jp/prof/hnagano/houkoku/h18kisomathe2-10.html.

[3] フジエダ電子出版: ときわ台学, 複素関数論入門, http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/12cmplx/000cmplx.html.

[4] 岩永信之: ++C++;, べき級数展開・留数, http://ufcpp.net/study/analysis/residue.html.

[5] 井澤裕司: PIT Lab, フーリエ級数展開, http://laputa.cs.shinshu-u.ac.jp/~yizawa/InfSys1/basic/chap3/index.htm.